

УДК 51-74

Ханин А. Г.

НГТУ, г. Новосибирск, Россия

Практическое применение рекуррентного алгоритма оценивания градиента

Аннотация

Автором статьи представлен алгоритм оценивания градиента в экстремальных системах автоматического управления, основанный на классической теории фильтра Калмана. Проведенные вычислительные эксперименты показали относительно высокую точность оценивания градиента, а также хорошую помехоустойчивость. В данной статье приводится пример практического использования алгоритма при решении задачи оптимизации расхода топлива у транспортных средств.

Ключевые слова: АСУ, экстремальные системы, градиент, фильтр Калмана, оптимальное решение.

Hanin A. G.

NSTU, Novosibirsk, Russia

Practical use of the algorithm estimating the gradient

Abstract

The author presents an algorithm estimating the gradient in extreme control systems, based on the classical theory of the Kalman filter. The key features of the algorithm are a representation of the dynamic component object model in the state space, and approximation of the objective function finite Taylor series. The author cites the example of the practical use of the algorithm in solving the problem of optimizing fuel consumption.

Keywords: automatic control, extreme system, gradient, Kalman filter, optimal solution.

Введение

Системы экстремального регулирования (СЭР) востребованы в различных областях науки и техники: радиолокации, спутниковой навигации, системах экологического мониторинга, теплоэнергетике и многих других [1–3]. Данные системы используются, например, при управлении химическими реакторами, нагревательными установками, процессами транспортирования нефтегазовой среды, при настройке резонансных контуров. В разное время теорией занимались Леблан М., Штейн Т., Красовский А. А., Моросанов И. С., Кунцевич В. М., Растринин Л. А., Воскобойников Ю. Е., Востриков А. С. и другие [4–10].

Необходимость в СЭР возникла вследствие того, что в автоматизированном производстве стали чаще появляться технологические процессы с показателями, требующими оптимизацию (например, время производственного цикла, рабочая температура, выход продукта и другие). Как следствие, появилась необходимость автоматически поддерживать количественные значения этих показателей на некотором оптимальном значении. При этом, обычная система автоматического регулирования (САР) не могла решить данную задачу.

Решение задачи экстремального управления заключается в автоматическом поиске такого значения регулирующего воздействия, которое обеспечивает максимум или минимум регулируемой величины. В отличие от синтеза обычных САР, синтез систем экстремального регулирования происходит в условиях неполной априорной информации о состоянии объекта управления, что вызывает определенные затруднения. Зачастую, ни количество экстремумов, ни их положение, ни аналитическое выражение функции качества могут быть также неизвестны. Для примера, в обычной САР практически всегда известно заданное значение регулируемого параметра и, следовательно, всегда известно, в каком направлении необходимо изменять регулирующее воздействие, чтобы ликвидировать ошибку на выходе системы.

Часть затруднений при решении задач экстремального управления преодолеваются использованием производной

3. Квалиметрия, управление качеством и стандартизация

(градиента) некоторой целевой функции (экстремальной характеристики) для выработки необходимого управляющего воздействия. С помощью градиента осуществляется достижение экстремальных точек (минимума или максимума) целевой функции. Ключевым моментом при синтезе СЭР является правильный выбор метода или алгоритма оценивания градиента.

В современной теории автоматического управления существует множество методов оценивания градиента. Например, метод деления производных, метод конечных разностей, метод синхронного детектирования и другие. Автором статьи и его научным руководителем Воскобойниковым Ю. Е. предложен рекуррентный алгоритм оценивания градиента.

1. Методы

Рекуррентный алгоритм оценивания градиента (РАО), представленный ниже, основан на теории классического фильтра Калмана [11]. Необходимым условием применения фильтра Калмана является возможность описания динамической части системы в пространстве состояний. При этом описание системы включает две модели: модель динамики вектора состояний системы и модель измерений вектора состояний.

Рассмотрим систему экстремального регулирования с некоторой целевой функцией $Y(t, y)$. Предположим, что в окрестности точек экстремума целевая функция является дважды дифференцируемой по y . Это позволяет построить следующее приближение в окрестности некоторой точки y^* :

$$Y(t, y) = Y(t, y^*) + Y'(t, y^*)(y - y^*) + \frac{1}{2} Y''(t, y^*)(y - y^*)^2 + r(y), \quad (1)$$

где $r(y)$ – дополнительный член ряда Тейлора, который можно рассматривать как ошибку аппроксимации целевой функции первыми тремя членами ряда. Существуют несколько форм записи дополнительного члена. Например, дополнительный член в форме Лагранжа может иметь вид:

$$r(y) = \frac{Y'''(\zeta)}{3!} \cdot (y - y^*)^3, \quad (2)$$

где $\zeta \in (y^*, y)$ если $y \geq y^*$ или $\zeta \in (y, y^*)$, если $y \leq y^*$. Если целевая функция в окрестности точки экстремума является параболой, то дополнительный член равен нулю и ошибка аппроксимации отсутствует.

На практике значения целевой функции измеряются в дискретных точках с некоторой случайной погрешностью (шумом измерения). Поэтому измеренные в моменты y_k значения представим как:

$$\tilde{Y}_k = \tilde{Y}(y_k) = Y(y_k) + \eta_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где η_k – случайная величина с числовыми характеристиками:

$M[\eta_k] \equiv 0, D[\eta_k] = \sigma_k^2, M[\eta_j \eta_k] = 0$, если $j \neq k$. Последнее означает отсутствие корреляции между погрешностями в разных точках измерения.

Введем вектор состояния:

$$x(k) = \begin{bmatrix} Y(y_k) \\ Y'(y_k) \\ Y''(y_k) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Тогда, обозначая $y_{k+1} = y, y_k = y^*$, используя первые три члена ряда (1) и допуская пренебрежительную малость дополнительного члена $r_2(y)$, приходим к следующей модели представления целевой функции в пространстве состояний:

3. Квалиметрия, управление качеством и стандартизация

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & y_{k+1} - y_k & \frac{(y_{k+1} - y_k)^2}{2} \\ 0 & 1 & y_{k+1} - y_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(k). \quad (5)$$

Модель измерений имеет вид:

$$z_{k+1} = \tilde{Y}(y_{k+1}) = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot x(k+1) + \eta_{k+1}. \quad (6)$$

Введем матрицы

$$\Phi(k+1, k) = \begin{bmatrix} 1 & y_{k+1} - y_k & \frac{(y_{k+1} - y_k)^2}{2} \\ 0 & 1 & y_{k+1} - y_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и} \\ H = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Запишем выражения (5) и (6) в виде, принятом в теории фильтра Калмана:

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k) \cdot x(k), \quad (7)$$

$$z_{k+1} = H(k+1, k) \cdot x(k+1) + \eta_{k+1}. \quad (8)$$

Также сделаем «обычные» для фильтра Калмана предположения:

– вектор $x(0)$ («стартовая точка») имеет нормальное распределение с $M[x(0)] = \bar{0}$ – вектор и ковариационной мат-

рицей V_x , т. е. $x(0) \in N(m_x, V_x)$;

– погрешность η_k имеет нормальное распределение $\eta_k \in N(0, \sigma_k^2)$, и не коррелирована с $x(k)$.

При сделанных предположениях оптимальная оценка $\hat{x}(k+1)$, минимизирующая СКО оценивания

$\Delta(k+1) = M \left[|\hat{x}(k+1) - x(k+1)|^2 \right]$ определяется следующим рекуррентным соотношением:

$$\hat{x}(k+1) = \Phi(k+1, k) \cdot \hat{x}(k) + K(k+1) \cdot [z_{k+1} - H(k+1) \cdot \Phi(k+1) \cdot \hat{x}(k)], \quad k=1, 2, \dots \quad (9)$$

с начальным условием $\hat{x}(0)$, задание которого обсуждается позже. Вектор $K(k+1)$ определяется выражениями:

$$K(k+1) = \frac{1}{[H \cdot V_\varepsilon(k+1|k) \cdot H^T + \sigma_{k+1}^2]} \cdot V_\varepsilon(k+1|k) \cdot H^T, \quad (10)$$

где

$$V_\varepsilon(k+1|k) = \Phi(k+1, k) \cdot V_\varepsilon(k) \cdot \Phi^T(k+1, k), \quad (11)$$

$$V_\varepsilon(k+1) = [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot V_\varepsilon(k+1|k) \quad (12)$$

с начальным условием $V_\varepsilon(0)$. Матрица $V_\varepsilon(k+1|k)$ – ковариационная матрица вектора ошибки предсказания, $V_\varepsilon(k+1)$ – ковариационная матрица вектора ошибки оценивания $\varepsilon(k+1) = \hat{x}(k+1) - x(k+1)$.

Отметим некоторые особенности построенного алгоритма оценивания:

– текущая оценка $\hat{x}(k+1)$ вектора состояния определяется

3. Квалиметрия, управление качеством и стандартизация

двумя слагаемыми: вектором предсказания (первое слагаемое в (9)) и вектором коррекции (второе слагаемое в (9)), который зависит от нового измерения z_{k+1} . Данный подход позволяет весьма успешно использовать фильтр Калмана в масштабе реального времени;

- матрица $K(k+1)$ не зависит от измерений $\{z_1, \dots, z_{k+1}\}$, поэтому она может быть вычислена априори, т.е. до начала процедуры вычисления градиента, и ее элементы сохранены в памяти компьютера, что позволяет строить оценку $\hat{x}(k+1)$ в реальном масштабе времени;

- вычисление ковариационной матрицы $V_e(k+1)$ вектора ошибки оценивания позволяет определить числовые характеристики случайной ошибки оценивания $\xi(k+1)$, что позволяет говорить о точности алгоритма оценивания градиента.

2. Результаты

Рассмотрим практические аспекты применения рекуррентного алгоритма оценивания градиента на примере задачи оценивания оптимальной средней скорости движения автомобиля с целью минимизации расхода топлива.

В настоящее время расход топлива (РТ) является немаловажной характеристикой автомобиля и его двигателя. В количественном выражении это объём топлива, израсходованный автомобилем при прохождении заданной дистанции. В странах с метрической системой мер РТ измеряется в литрах на 100 км пробега автомобиля (л/100 км). Чем меньше значение РТ, тем автомобиль считается экономичнее [12].

Проблеме снижения расхода топлива автомобилем и другими видами транспорта посвящено множество работ [12–16]. Анализируя их, можно сделать вывод, что расход топлива является сложной функцией нескольких переменных, не все из которых поддаются точному оцениванию. При оценке расхода топлива уточняются, например, мощность двигателя, снаряженная масса автомобиля, тип топлива, режим использования автомобиля («на трассе», «в городе», «в пробках», «зимой»,

«летом») и т. д. Такая конкретизация позволяет частично ввести неподдающиеся прямому учёту параметры, преобразовав их в некоторые усреднённые значения. Но типовое значение расхода и в этом случае остается весьма приблизительным. Так, например, при совокупном режиме «город-зима-пробки» отличие показаний у разных автовладельцев одной и той же модели автомобиля могут достигать 100 % и выше.

Тем не менее, существуют довольно точные экспериментальные подтверждения влияния тех или иных факторов, определяющих расход топлива. Например, в диссертационной работе Исполатова Б. Ю. [15] приводится информация о подобных факторах, а также их влияние на расход топлива в процентном соотношении для автобуса ЛиАЗ-6212: «При совместном рассмотрении факторов условий эксплуатации весовой вклад средней скорости сообщения составляет 34,6 %. Далее идет средняя длина перегона (26,9 %), удельное число поворотов на маршруте (15,4 %), среднесуточный пробег автобуса (15,2 %) и фактическое наполнение салона автобуса по перегону на 1 м² площади пола (7,9 %).»; «Рассматривая выявленные значимые факторы условий эксплуатации с позиции эластичности, приходим к выводу, что наибольший показатель при всех прочих равных условиях имеет средняя скорость сообщения. Изменение ее на 5 % приводит к изменению маршрутного расхода топлива автобуса ЛиАЗ-6212 на 0,73 %» [15, с. 157–158].

В данной главе посредством РАО решается задача оценки оптимальной средней скорости движения автомобиля Рено Сандеро (8V–1.4, пятиступенчатая механическая коробка передач), позволяющая минимизировать его расход топлива. График целевой функции (рис. 1) основан на усредненных значениях выборок независимых друг от друга результатов оценочных замеров, произведенных несколькими автовладельцами [20].

В качестве целевой функции получена парабола 5-го порядка вида:

3. Квалиметрия, управление качеством и стандартизация

$$Y(y) = \sum_{i=0}^5 k_i y^i, \quad (13)$$

где

$$k_0 = 14.594; k_1 = -0,2225; k_2 = 9 \cdot 10^{-4}; k_3 = 2 \cdot 10^{-5}; k_4 = -2 \cdot 10^{-7}; k_5 = 7 \cdot 10^{-10}$$

На рис. 1 представлены графики экстремальной характеристики $Y(y)$ и соответствующего ей градиента $Y'(y)$ на интервале $y = [10, 110]$.

Условия данной задачи примечательны при экспериментальной проверке РАО тем, что в качестве ЭХ используется кривая 5-го порядка и тем, что производная на всей области определения имеет относительно малые значения.

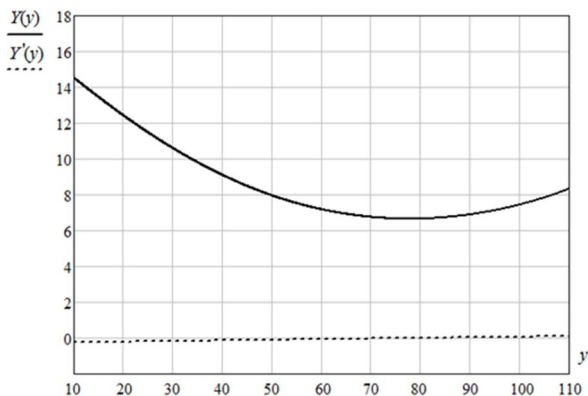


Рис. 1. Эталонные графики экстремальной характеристики и Градиента

Рассмотрим оценку ЭХ и градиента при уровне измерительной погрешности $\sigma^2 = 10$ и при нулевой «стартовой точке». Уровень дисперсии измерительной погрешности выбран на основе экспериментальных данных [20]. Дрейф в данном вычислительном эксперименте не учитывается.

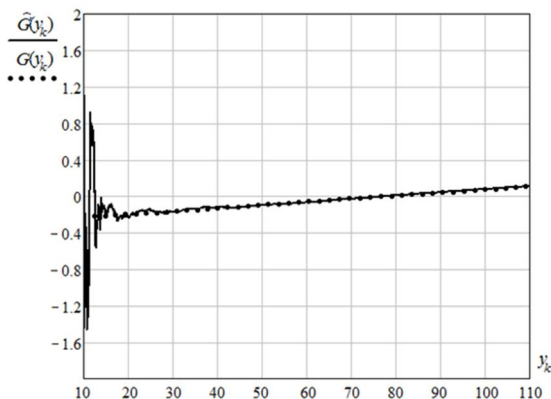


Рис. 2. Оценка градиента (РАО, $x(0) = 0$, $\sigma^2 = 10$)

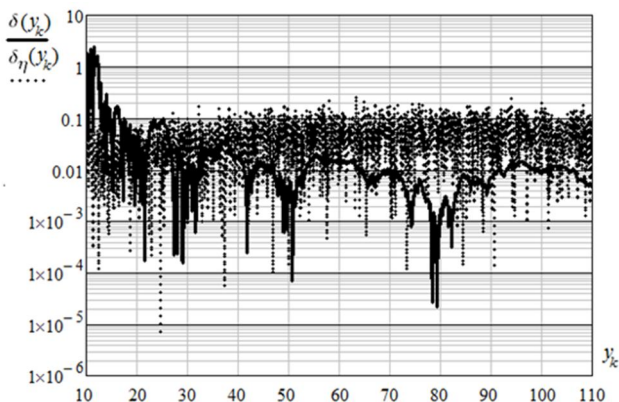


Рис. 3. Ошибка оценивания градиента (РАО, $x(0) = 0$, $\sigma^2 = 10$)

Анализируя графики оценок градиента, можно сделать вывод, что рекуррентный алгоритм в данном вычислительном эксперименте показал весьма хорошие результаты. Фильтр Калмана обеспечил достаточно быструю сходимость переходных процессов. Следует отметить, что перерегулирование при

3. Квалиметрия, управление качеством и стандартизация

оценке градиента (рисунок 2) не оказало влияние на работу системы экстремального управления в рамках рассматриваемой задачи. Относительная ошибка оценивания градиента на интервале $y_k = [20, 110]$ имеет значение $\delta_\varepsilon(L) = 8.7 \times 10^{-3}$, что также является хорошим показателем.

Заключение

В данной статье был представлен рекуррентный алгоритм оценивания градиента в системах экстремального регулирования, а также представлен вариант его практического применения при решении задачи оптимизации расхода топлива. Но важно отметить то, что приведенные результаты практического эксперимента не отражают всех преимуществ разработанного алгоритма. Тем не менее, обширный вычислительный эксперимент с различными целевыми функциями, начальными условиями и дрейфом экстремальной характеристики [17–19] позволил выявить определенные преимущества РАО перед существующими методами, а именно:

1. Достаточно хорошую помехоустойчивость к погрешностям измерений экстремальной характеристики. Это свойство подтверждено результатами вычислительных экспериментов при различных значениях измерительной погрешности. Помимо этого, результаты экспериментов подтвердили явное преимущество рекуррентного алгоритма оценивания перед методом конечных разностей.

2. Устойчивость к некорректности задания начального вектора состояний («стартовой точки»). Это свойство подтверждено результатами вычислительных экспериментов при различных значениях начального вектора $x(0)$.

3. Эффективное оценивание градиента при наличии дрейфа экстремальной характеристики. Это свойство подтверждено результатами вычислительных экспериментов для экстремальной характеристики, дрейфующей во времени.

4. Возможность применения при различных видах целевой функции. Это свойство подтверждено результатами вычислительных экспериментов на примере парабол 2-го и 5-го порядков, а также параболы, искаженной синусоидальной составляющей.

5. Возможность применения в масштабе реального времени, поскольку оценка градиента выполняется без предварительного накапливания измерительной информации.

Кроме этого, следует отметить, что предложенный рекуррентный алгоритм оценивания градиента в определенной степени уникален, исходя из результатов проведенного в информационных источниках поиска.

Список литературы

1. Новиков Д. А. Теория управления организационными системами. 3-е изд. М.: Издательство физико-математической литературы, 2012. 604 с.

2. Андрюшин А. В., Сабанин В. Р., Смирнов Н. И. Управление и инноватика в теплоэнергетике. М.: Издательский дом МЭИ, 2011. 392 с.: ил.

3. Афанасьев В. В., Логиновский В. А. Расчет координат места судна по избыточным навигационным измерениям: учеб. пособие по математическим основам судовождения. СПб.: ГМА им. адм. С. О. Макарова, 2002. 40 с.

4. Leblanc M. Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée // Revue générale de l'électricité, 1922.

5. Казакевич В. В. Системы экстремального регулирования и некоторые способы улучшения их качества и устойчивости. // Автоматическое управление и вычислительная техника. М.: Машгиз, 1958.

6. Казакевич В. В., Родов А. Б. Системы автоматической оптимизации. М.: Энергия, 1977. 288 с.

7. Красовский А. А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. М.: Физматгиз, 1963. 468 с.

8. Растринин Л. А. Системы экстремального регулирования. М.: Наука. 1974.

9. Моросанов И. С. Релейные экстремальные системы. М.: Наука, 1964.

10. Кунцевич В. М. Системы экстремального управления. ГТИУССР, 1961. 3.14

11. Kalman R. E. A new approach to linear filtering and predic-

3. Квалиметрия, управление качеством и стандартизация

tionproblems // Transactionsofthe ASME. 1960. № 3. с. 21.

12. Евтин П. В. Сбережение топлива при эксплуатации автомобилей в температурных условиях севера и Сибири. Автореф. дис. канд. техн. наук. Тюмень, 2000.

13. Захаров Д. А. Влияние зимних условий эксплуатации автомобилей на топливную экономичность двигателей. Автореф. дис. канд. техн. наук. Тюмень, 2000.

14. Исмаилов Р. И. Совершенствование технической эксплуатации городских автобусов за счет корректирования ее основных нормативов и нормирования расхода топлива на основе статистической информации. Автореф. дис. канд. техн. наук. М., 2003.

15. Исполатов Б. Ю. Разработка методики нормирования маршрутного расхода топлива автобуса ЛиАЗ-6212 в эксплуатации. Диссертация канд. техн. наук. М., 2005.

16. Максимец А. В. Измерение расхода топлива судовых дизелей ультразвуковым методом в условиях эксплуатации. Автореф. дис. канд. техн. наук. Санкт-Петербург, 2004.

17. Воскобойников Ю. Е., Ханин А. Г. Рекуррентный алгоритм оценивания градиента в системах экстремального регулирования // Журнал «Научный вестник НГТУ». Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012, № 1 (46). С. 3–8.

18. Ханин А. Г. Рекуррентный алгоритм оценивания градиента в экстремальных системах // Устойчивость и процессы управления : материалы 3 междунар. кон., посвящ. 85-летию со дня рожд. проф., чл.-кор. РАН В. И. Зубова (Санкт-Петербург, 5–9 окт. 2015 г.). Санкт-Петербург : Издат. дом Федоровой Г. В., 2015. С. 99–100. ISBN 978-5-9907101-1-5.

19. Khanin, Andrey G. Gradientestimationalgorithmbasedon-theKalmanfilter // "StabilityandControlProcesses" inMemoryof V.I. Zubov (SCP), 2015 InternationalConference, IEEE ConferencePublications, P. 55 – 57, DOI: 10.1109/SCP.2015.7342057.

20. Клуб РЕНО Сандеро. Форум [Электронный ресурс] URL: <http://www.clubsandero.ru/>.